АЛГОРИТМ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*

Р.Г. Гамидов

Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
shekihamidov@gmail.com

Резюме. В работе рассматривается задача линейного программирования, у которой матрица условий имеет блочно-треугольную форму. Диагональные блоки являются М-матрицей, т.е. они имеют неотрицательную обратную, а не диагональные блоки, неположительные, т.е. они составлены из неотрицательных элементов. Как правило, модели линейного программирования используемые в практических задачах имеют большую размерность, если их матрицы являются М-матрицей [1]. Когда отдельные блоки задачи являются такими матрицами, проблемы, связанные с большой размерности еще больше возникают. Данная работа нацелена для преодоления этих проблем. Предлагается алгоритм разложения, с помощью которого решение исходной задачи сводится к решению локальных задач линейного программирования. Число строк матрицы локальных задач равно числу строк отдельных блоков, а число локальных задач совпадает числом диагональных блоков. Эффективные алгоритмы из [2] разработанные для локальных задач делают алгоритм разложения эффективным способом решения для рассматриваемой блочной задачи. С помощью числового примера дается иллюстрация схемы разложения.

Ключевые слова: линейное программирование, блочные задачи, алгоритм разложения, базисное решение, оптимальный базис, симплекс метод.

AMS Subject Classification: 90C31.

1. Введение.

Многие задачи, связанные с выбором решения, имеют свою специфику. Это обычно происходит когда решаются большие задачи [3]. Алгоритмы решения разработанные для таких задач, учитывая структуру специфики задачи, значительно повышают вычислительную эффективность. Такие алгоритмы устраняют многие из сложностей, которые могут возникнуть при решении реальных задач с использованием стандартных методов.

Большинство больших задач представлены в виде линейного программирования. Размерность задачи в этом случае зависит от количества переменных, количества ограничений, связывающих эти переменные и характера этих ограничений. Одной из таких проблем является блочно-треугольное линейное программирование с положительными элементами по диагонали [4]. Такие задачи возникают,

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 22.10.2019

например, когда численно решается задача оптимального управления процессом нефтедобычи в упругом режиме и задача Марковица о максимизации полной прибыли [2].

Алгоритмы, предложенные в [1], также могут использованы для рассматриваемой здесь задачи. Однако, когда количество блоков велико и размер каждого блока велик, использование алгоритмов в [1] сопряжено со многими трудностями. Эти трудности не сильно отличаются от трудностей, возникающихся при решении исходной задачи стандартным способом. Данная работа предлагает схему разложения для преодоления этих трудностей. С помощью схемы, решение задачи сводится к решению последовательных подзадач, число которых равно числу диагональных блоков. Схема разложения действует следующим образом: берем последний диагональный блок и составляем первую локальную подзадачу и находим её оптимальные базисные переменные. Показывается, что эти переменные одновременно являются оптимальными базисными переменными и для исходной задачи. С определением базисных переменных одновременно определяются и ведущие строки, с помощью которых исключаем эти оптимальные базисные переменные из целевой функции исходной задачи и переходим к второму шагу. На втором шаге берем предпоследний диагональный блок у исходной задачи и составляем вторую локальную задачу аналогично первому шагу (коэффициенты целевой функции этой задачи выбираются среди новых коэффициентов целевой функции исходной задачи, которые получаются после выполнения первого шага). Теперь, аналогично первому шагу, выполняем второй шаг. Процесс, таким образом, повторяется. После завершения последнего шага, в обратном порядке вычисляем значение координатов оптимального решения задачи. Следовательно, если размерность диагональных блоков $[mxm]$, а их равно n, то решая n число задач линейного программирования с (mxm)-мерной матрицей ограничений (одним из эффективных методов из [1]) мы фактически решаем задачу с $(nmxnm)$ – мерной матрицей ограничений. На числовом примере иллюстрируется это свойство алгоритма разложения.

2. <u>Постановка задачи.</u> Пусть A заданная матрица. Если элементы A неотрицательны, то будем писать, что $A \geq 0$; если – A такая матрица , то используем обозначение A≤0.

Рассматривается задача

$$A_{11}x^1 \leq b^1,$$

$$A_{21}x^1 + A_{22}x^2 \leq b^2,$$

$$A_{n-11}x^1 + A_{n-12}x^2 + \cdots + A_{n-1}x^{n-1} \leq b^{n-1},$$

$$A_{n1}x^1 + A_{n2}x^2 + \cdots + A_{nn-1}x^{n-1} + A_{nn}x^n \leq b^n$$

$$x^1 \geq 0,\ \ x^2 \geq 0, \qquad\qquad x^{n-1} \geq 0,\ \ x^n \geq 0, \tag{1}$$

$$c^1x^1 + c^2x^2 + \cdots + c^nx^n \to max$$

Здесь $A_{ij}, i = 1,\dots,n, j = 1,\dots,n\ (mxm)$ – мерные матрицы; $, b^i, x^i - m$– мерные вектор-столбцы; c^i, $i = 1,\dots,n$-мерные вектор-строки; диагональные элементы A_{ii}, $i = 1,\dots,n$, положительные и $A_{ii}^{-1}\geq 0$, т.е. A_{ii} является М-матрицей [4], $A_{ij} \leq 0$ при $i \neq j$, $A_{ij} = 0$ при $i < j$, $b^i, x^i \geq 0, i = 1,\dots,m$.

Задача типа (1) решается, когда численно реализуется следующая динамическая задача линейного программирования в $L_2^n[0,T]$:

$$J=\int_0^T c(t)x(t)dt \to max,$$

$$x(t) - F[x(t)] \leq b(t),\ \ x(t) \geq 0,\ \ 0 \leq t \leq T. \tag{2}$$

Здесь $F[x(t)] \equiv A(t)x(t) + \int_0^t H(t,\tau)x(\tau)\,d\tau$.

Задача типа (2) решается когда требуется оптимизировать управления нефтедобычи в упругом режиме [1,2]. (2) является одной из практических задач, которые рассматриваются в [1,2] и численно решается как задача (1). Цель предлагаемой работы разрабатывать эффективный способ численной реализации задачи (1) (следовательно и задачи (2)) по сравнению алгоритмов в [1,2]. Считаем целесообразным сначала иллюстрировать схемы разложения на конкретном примере.

Численный пример.

Берем n=2. Тогда задача (1) выглядит следующим образом:

$$A_{11}x^1 \leq\ b^1,$$

$$A_{21}x^1 + A_{22}x^2 \leq b^2, \tag{3}$$

$$x^1 \geq 0, \qquad x^2 \geq 0,$$

$$c^1x^1 + c^2x^2 \to max$$

Теперь берем конкретные данные:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & -0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 0.7 & -0.1 & -0.4 \\ -0.3 & -0.2 & 0.8 & -0.1 \\ -0.1 & -0.4 & 0.1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.0 & 0.2 & -0.1 \\ 0.0 & 0.8 & -0.1 & -0.5 \\ -0.2 & -0.1 & 1 & -0.6 \\ -0.1 & -0.1 & -0.2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} -1 & -0.4 & -0.5 & -0.2 \\ -0.1 & -0.4 & -0.6 & -0.1 \\ -0.6 & 0.4 & -0.1 & -0.8 \\ -0.2 & -0.2 & -0.3 & -0.4 \end{pmatrix}, \quad b^1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$c^1 = (-2, -6, -10, 1), \; c^2 = (5, -10, -1, -12).$$

Описание алгоритма разложения для (3):

Шаг 1. Берем часть ограничений условия (3) и составляем задачу:

$$A_{21}x^1 + A_{22}x^2 \leq b^2,$$

$$x^1 \geq 0, \; x^2 \geq 0,$$

$$Z = c^1x^1 + c^2x^2 \to max$$

Перепишем задачу (4) в развернутой форме:

$$-x_1 - 0.4x_2 - 0.5x_3 - 0.2x_4 + 0.7x_5 - 0x_6 - 0.2x_7 - 0.1x_8 \le 1,$$

$$-0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.6x_3 - 0.1x_4 - 0x_5 + 0.8x_6 - 0.1x_7 - 0.5x_8 \le 3,$$

$$-0.6x_1 - 0.4x_2 - 0.1x_3 - 0.8x_4 - 0.2x_5 - 0.1x_6 + 1x_7 - 0.6x_8 \le 1$$

$$-0.2x_1 - 0.1x_2 - 0.3x_3 - 0.4x_4 - 0.1x_5 - 0.3x_6 - 0.2x_7 + x_8 \le 4,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0, x_8 \ge 0, \quad (4)$$

$$z = -2x_1 - 6x_2 - 10x_3 + x_4 + 5x_5 - 10x_6 - x_7 - 12x_8 \to max.$$

Теперь составляем локальную задачу для первого шага (Л31), которую получаем из (4) при условии $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$
Матричная форма записи Л31:

$$A_{22}x^2 \le b^2, \quad x^2 \ge 0, \; Z = c^2x^2 \to max. \quad (5)$$

Числовыми данными задача (5) имеет вид:

$$0.7x_5 - 0x_6 - 0.2x_7 - 0.1x_8 \le 1,$$

$$-0.x5 + 0.8x6 - 0.1x7 - 0.5x8 \le 3,$$

$$-0.2x_5 - 0.1x_6 + 1x_7 - 0.6x_8 \le 1, \quad (6)$$

$$-0.1x_5 - 0.3x_6 - 0.2x_7 + 1x_8 \le 4,$$

$$x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0, x_8 \ge 0,$$

$$5x_5 - 10x_6 - x_7 - 12x_8 \to max.$$

Следуя алгоритму из [1,2] находим, что x_5 и x_7 являются базисными переменными для оптимального базиса задачи (6) ([1],свойства 3,стр.225). Номера ведущей строки, участвующей при определении выводимого из базиса переменного, совпадает с номером индекса, вводимого в базис переменных ([1],стр.193,свойства 2). В нашем случае это пятая и седьмая строка задачи (3) (задача (3) имеет 8 строк), или первая и третья строка задачи (6). Задача (6) обладает свойствами [1,2]: найденный оптимальный базис не зависит от правой части задачи (6) ([1],стр.125,свойства 4).Отсюда, как следствие следует: переменные x_5 и x_7 являются оптимальными базисными переменными для исходной задачи (3) (назовем это свойство основным свойством алгоритма разложения (ОСА)). Переменные x_6 и x_8 получают нулевые значения в оптимальном решении в исходной задачи (3). Поэтому всюду полагаем $x_6 = 0$, $x_8 = 0$ в процессе дальнейшего решения исходной задачи. Тогда в результате этого, становится лишними второе и четвертое условия задачи (4), а пятое и седьмое условия становятся условиями равенствами ([1],свойство 1, стр.122). Они являются ведущими и для исходной задачи. Теперь выражаем переменные x_5и x_7 через x_1, x_2, x_3, x_4с помощью системы

$$-x_1 - 0.4x_2 - 0.5x_3 - 0.2x_4 + 0.7x_5 - 0.1x_7 = 1, \tag{7}$$

$$-0.6x_1 - 0.4x_2 - 0.1x_3 - 0.8x_4 - 0.2x_5 + 1\,x7 = 1$$

и учитываем их в целевой функции задачи (4), имеем локальную задачу 2 (ЛЗ2):

$$5.15x_1 - 3.05x_2 - 6.45x_3 + 2.45x_4 + 7.15 \rightarrow max,$$

$$0.8x_1 - 0.1x_2 - 0.3x_3 - 0.1x_4 \le 4,$$

$$-0.1x_1 + 0.7x_2 - 0.1x_3 - 0.4x_4 \le 3,$$

$$-0.3x_1 - 0.2x_2 + 0.8x_3 - 0.1x_4 \le 5,$$

$$-0.1x_1 - 0.4x_2 - 0.1x_3 + 1x_4 \le 2,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

Шаг 2. Решаем ЛЗ2 согласно алгоритму из [1,2], находим её оптимальные базисные переменные x_1 и x_4 и соответствующие им систему уравнений.

$$0.8x_1 - 0.1x_4 = 4,$$
$$-0.1x_1 + 1x_4 = 2,$$

с помощью которой находим их значения:

$x_1^{op} = 5.44,\ x_2^{op} = 0,\qquad x_3^{op} = 0,\ x_4^{op} = 2.54.$

Теперь учитываем эти значения в (7), вычисляем значения x_5^{op}, x_7^{op}:

$x_5^{op} = 12.57,\ \ x_6^{op} = 0,\ \ x_7^{op} = 9.73,\ \ x_8^{op}=0$

Следовательно, оптимальным решением задачи (4) будет

$x^{op} = (5.44, 0, 0, 2.54, 12.57, 0, 9.73, 0),$

а её оптимальное значение будет $Z^{op} = 40.66.$

1. Описание алгоритма разложения.

Шаг 1. Решаем задачу (Л 31)

$$A_{nn}x^n \le b^n,\quad x^n \ge 0,\quad c^n x^n \to max$$

по схеме, предложенного в [1,2] и составляем множество индексов J^1 $\subset \{1,2 \dots, m\}$ оптимальных базисных переменных x_i^n и составляем системы линейных уравнений.

$$(A_{n1}x^1 + A_{n2}x^2 + \dots + A_{nn-1}x^{n-1} + A_{nn}x^n) = b_i^n,\ \mathrm{i} \in J^{(1)}, \tag{8}$$

$$x_j^n = 0,\ j \in \{1,2 \dots, m\} \backslash J^1 \tag{9}$$

С помощью системы (8) выражаем переменные $x_i^n, i \in J^1$ через остальные переменные и учитываем это в (9) в целевой функции задачи (1) получаем выражение целевой функции в зависимости только от $x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$.

$$Z^1 = c^{1(1)}x^1 + c^{2(1)}x^2 + \dots + c^{n-2(1)}x^{n-2} + c^{n-1(1)}x^{n-1} + \alpha^{(1)}.$$

После чего составляем локальную задачу для шага 2.

Шаг 2. Решаем задачу (Л32).

$$A_{n-1n-1}x^{n-1} \le b^{n-1},\quad x^{n-1} \ge 0,\quad c^{n-1}x^{n-1} \to max$$

и аналогично **шагу 1**, составляем множество J^2 ее оптимальных базисных переменных, находим выражения этих переменных через небазисных, полагаем $x^{n-1} = 0, j \in \{1,2 \dots, \text{т}\} \backslash J^2$ и наконец пере образуя Z^2 составляем локальную задачу (Л33) и новую выражению Z^1

$Z^1 = c^{1(2)}x^1 + c^{2(2)}x^2 + \dots + c^{n-2(2)}x^{n-2} + \alpha^{(2)}$

Шаг 3. Третий шаг решает задачу (Л33) и определяет множеств J^3 и

$Z^3 = c^{1(3)}x^1 + \dots + c^{n-3(1)}x^{n-3} + \alpha^{(3)}$

Наконец решаем задачу (ЛЗП) последнего шага.

Шаг n.

$$A_{11}x^1 \le b^1, \quad x^1 \ge 0, \quad c^{n(n-1)}x^n \to max \tag{10}$$

и находим множество J^n и число $\alpha^{(n-1)}$. $\alpha^{(n-1)}$ оптимальным значением целевой функции задачи (1):

$Z^{op} = \alpha^{(n-1)}$

После n-го шага составляем оптимального решения

$x^{op} = (x^{1op}, x^{2op}, \dots, x^{nop})$

Задачи (1) по следующей схеме:

1) Берем оптимальное решение задачи (10) и принимаем его за значением x^{1op};
2) x^{2op} находится из системы уравнений

$A_{21}x^{1op} + A_{22}x = b^2, \ x_j = 0, j\epsilon\{1, \dots, m\} \bigvee^{n-2}$

$x^{2op} = A_{22}^{-1}(b^2 - A_{21}x^{1op})$

……

k) Известны $x^{1op}, x^{2op}, \dots, x^{k-1op}.x^{kop}$ находится из системы:

$A_{k1}x^{1op} + \dots + A_{kk-1}x^{k-1op} + A_{kk}x = b^k, \ x_j = 0, j\epsilon\{1, \dots, m\} \bigvee^{n-k}$

$x^{kop} = A_{kk}^{-1}(b^k - A_{k1}x^{1op} - \dots - A_{kk-1}x^{k-1op} + b^k)$

Таким способом, зная $J^1, \dots, J^{k-1}$ и $x^{1op}, \dots, x^{k-1op}$,последовательно вычисляем все координаты вектора x^{op}.

1. Блочная и итеративная форма алгоритма разложения.

Рассмотрим к-ую локальную задачу ЛЗК.

$$A_{n+1-k\, n+1-k}x^{n+1-k} \le b^{n+1-k}, x^{n+1-k} \ge 0,$$

$$c^{n+1-k(k)}\, x^{n+1-k} \to max. \tag{11}$$

Составляем двойственную ей задачу и решаем её итеративным образом по схеме предложенной в [5] и $J^{(k)}$определяем как множеств индексов положительных координатов её оптимального решения. Итеративный способ решения двойственной задачи мало отличается по сложности от простой итерации для линейных систем уравнений. Эту систему легко запрограммировать и составлять параллельную форму вычисления [6]. Теперь составляем подматрицу B_k , которую получаем после удаления из матрицы $A_{n+1-k\,n+1-k}$ всех строк и столбцов, индексы которых входят во множеств $\{1,\dots,m\} \setminus J^{(k)}$.

Далее, находим решение системы

$$uB_K = c^{n+1-k(k)} \qquad ; \qquad (12)$$

здесь $c^{-n+1-k(k)}$ -строка, которую получаем после удаления всех координат из $c^{n+1-k(k)}$ с индексами из множества $\{1,\dots,m\}\setminus J^{(k)}$. Уравнение можно решать и итеративным способом [1]. Пусть $u^{(k)}$ –решение системы (12). Тогда

$$c^{n+1-(k+1)}\, x^{n+1-(k+1)} = (c^1 - u^{(k)}B_k^i)x^1 + \cdots + (c^{k-1} - u^{(k)}B_k)\, x^{n-k} \quad (13)$$

Здесь B_k^i –подматрица матрицы A_{n+1-ki}, которую получаем после отбрасывания всех строк с индексами из $\{1,2,\dots,m\}\setminus J^{(k)}$.

Отметим, что блочная и итеративная форма алгоритма разложения не требует преобразования матрицы условий. Эта форма алгоритма более проще для программной реализации.

Каждый шаг алгоритма разложения требует объем вычислений соизмеримый с объемом вычислений, требуемым для решения задачи (11). Таким образом, мы свели решение исходной задачи (1) к решению n задач вида (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hamidov R.H., Mutallimov M.M., Huseynova X.Y., Javadzade R.R. Reduction of one block linear multicriteria decision – making problem, Advanced Mathematical Models and Application, V.3, N.3, 2018, pp. 227-233.
2. Беленький В.З. О задачах математического программирования, обладающих минимальной точкой, Докл. АН СССР, V.183, N.1, 1968.
3. Лэсдон Л. Оптимизация больших задач. М.: «Наука», М., 1975, 432 с.
4. Мееров М.В. Исследование и оптимизация многосвязных систем управления. – М.: «Наука», 1986, 235 с.

5. Мееров М.В., Литвак Б.Л. Оптимизация систем многосвязного управления. М.: «Наука», 1972, 344 с.
6. Фаддеева В.Н., Фаддеев Д.К. Параллельные вычисления в линейной алгебре, Кибернетика, N.3, 1982, сс.18-31.

DECOMPOSITION METHOD FOR ONE LINEAR PROGRAMMING

R.H.Hamidov
Baku State Universyti, Baku, Azerbaijan
shekihamidov@gmail.com

ABSTRACT

One block-triangle shape of the linear programming problem is considered and a decomposition method is suggested to solve the problem by solving a number of less-dimensional sub-problems. A numerical example is given to illustrate in greater detail each step of the decomposition scheme and its efficiency.

Keywords: Turbulent flow, Differential equation, Basic positions, Trace of movement an object, Inserted volume, Universal trajectories and solutions.

REFERENCES

1. Hamidov R.H., Mutallimov M.M., Huseynova X.Y., Javadzade R.R. Reduction of one block linear multicriteria decision – making problem, Advanced Mathematical Models and Application, V.3, N.3, 2018, pp. 227-233.
2. Belen'kiy V.Z. O zadachakh matematicheskogo programmirovaniya, obladayushchikh minimal'noy tochkoy, Dokl. AN SSSR, V.183, N.1, 1968 (Belenky V.Z. On mathematical programming problems with a minimum point. Doc. USSR Academy of Sciences, V.183, N.1,1968) (in Russian).
3. Lesdon L. Optimizatsiya bol'shikh zadach. M.: «Nauka», M., 1975, 432 s.(Lesdon L. Optimization of big problems. M .: «Nauka», 1975, 432 p.) (in Russian).
4. Meerov M.V. Issledovanie i optimizatsiya mnogosvyaznykh sistem upravleniya. – M.: «Nauka», 1986, 235 s (Meerov M.V. Research and optimization of multiply connected control systems. - M.: «Nauka»,1986, 235 p.) (in Russian).
5. Meerov M.V., Litvak B.L. Optimizatsiya sistem mnogosvyaznogo upravleniya. M.: «Nauka», 1972, 344 s. (Meerov M.V., Litvak B.L. Optimization of multiply connected control systems. M.: «Nauka», 1972, 344 p.) (in Russian).

6. Faddeeva V.N., Faddeev D.K. Parallel'nye vychisleniya v lineynoy algebre, Kibernetika, N.3, 1982, ss.18-31 (Faddeev V.N., Faddaev D.K. Parallel computing in linear algebra. Cybernetics, N.3, 1982, pp.18-31.) (in Russian).